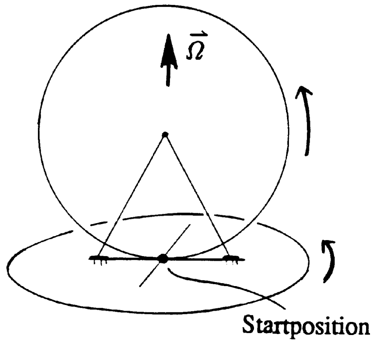
Aufgabe 13: Stellen Sie fest, ob die Kraftfelder 3

$$\vec{F}(\vec{r}) \;=\; \vec{e}_x\, x + \vec{e}_y\, y^2 + \vec{e}_z\, z^3 \qquad \text{und} \qquad \vec{F}(\vec{r}) \;=\; \vec{e}_x\, x + \vec{e}_y\, x + \vec{e}_z\, x$$

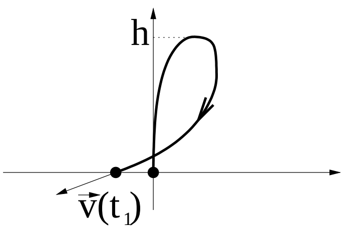
konservativ sind. Für konservative Kraftfelder kann ein Potenzial V definiert werden. Berechnen Sie für jedes der beiden Kraftfelder gegebenenfalls das Potenzial.

Aufgabe 14: Berechnen Sie für eine Masse m, die zum Zeitpunkt $t = 0$ aus der Höhe h fallen 2
gelassen wird, die kinetische Energie E_{kin} und potentielle Energie E_{pot} in Abhängigkeit von der Zeit. Zeigen Sie, das die Summe $E_{\text{kin}}(t) + E_{\text{pot}}(t)$ konstant ist.

Aufgabe 15: Der Fahrgast in der Gondel eines auf einem Karussel (Ω) 6
montierten Riesenrads (R, ω) folgt einer Raumkurve $\vec{r}(t) = R\,\vec{e}_3 + R\,(\vec{f}(t)\,\sin\omega t - \vec{e}_3\,\cos\omega t\,)$. Hier legen $\vec{e}_3$ und $\vec{f}(t) \doteq (\cos\Omega t, \sin\Omega t, 0)$ die momentane Riesenradebene fest. Bilden Sie $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$ und $\ddot{\vec{r}} = \vec{a}$ und berechnen Sie daraus deren Betragsquadrate v^2 und a^2 (der Geschwindigkeit und der Beschleunigung). Nach Vereinfachung kann man diesen Ausdrücken direkt ansehen, zu welchem (frühesten) Zeitpunkt und wo (Ortsvektor) welche maximale Geschwindigkeit erreicht wird (ist das Resultat plausibel?) und wo und unter welchen Umständen (Fallunterscheidung) welche größte Beschleunigung zu ertragen ist. Prüfen Sie nach, ob $\vec{v}(t) = [\vec{\omega}(t) + \vec{\Omega}] \times [\vec{r}(t) - \vec{r}_0]$ (für $\vec{r}_0$ ist ein Punkt zu wählen, der auf *beiden* Drehachsen liegt).



Zwei Zusatzpunkte: Berechnen Sie für den oberen Scheitelpunkt der Bahn die Krümmung $\kappa = |\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|/v^3$ und die Torsion $\tau = \dot{\vec{r}} \cdot (\ddot{\vec{r}} \times \dddot{\vec{r}})/|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2$ und vergleichen Sie mit R^{-1}.



Aufgabe 16: Ein Fußball (Masse m) startet bei $\vec{r}(0) \doteq (0,0)$ mit 4
Geschwindigkeit $\vec{v}(0) \doteq (0, v_0)$ senkrecht nach oben. Bei böigem Seitenwind wirkt auf ihn zusätzlich zur Erdanziehung noch die Kraft $\vec{f} \doteq mg(1-\alpha t, 0)$ mit $\alpha = 3g/2v_0$. Zu welcher Zeit t_0 erreicht der Ball seine größte Höhe $h = \ldots$, wann (t_1) und wo $(x(t_1))$ landet er wieder auf dem Spielfeld und welche Geschwindigkeit $\vec{v}(t_1)$ hat er dann. Korrigieren Sie die nebenstehende Skizze.

Hinweis: Die Newton-Gleichung ist hier unter Beachtung der Anfangsbedingungen komponentenweise zu lösen. Die Zeiten t_0 und t_1 erhält man aus $\dot{y}(t_0) = 0$ bzw. $y(t_1) = 0$.